ANALISI II ING. INFORMATICA 2022-2023 (591AA) - APPELLO VII, GENNAIO 2024

31-01-2024

Nome e cognome:____

Matricola:____

Durata: 2 ore. Nessun materiale è consultabile. Nessun device deve essere usato.

Esercizio 1.

(a) Si dica, esibendone eventualmente un potenziale, se il campo $F = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y^3, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 3xy^2\right)$ è conservativo.

(b) Data una curva continua $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^2$, con estremi $\gamma(a) = (1,3)$ e $\gamma(b) = (2,2)$, si calcoli il lavoro di F lungo γ.

Esercizio 2. Si calcoli il raggio di convergenza per la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} x^n.$$

Esercizio 3.

Verificare che per la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \log(1+x^2) + y$$

vale il Teorema del Dini nel punto $(x_0, y_0) = (0,0)$. Detta $y(x)$ la funzione implicita, si verifichi che $y'(0) = 0$, e si determini la natura di tale punto stazionario.

Esercizio 4.

(a) Enunciare il Teorema del Rotore (detto anche Teorema di Stokes).

(b) Si consideri la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 3,\ 4y^2 + z^2 - x = 0\}.$$

Dopo aver scelto l'orientazione della superficie, verificare il Teorema del Rotore per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x,0,0).$$

Soluzioni

1a. Un potenziale è dato da $U(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy^3$.

1b. Essendo dunque F un campo conservativo, il lavoro dipende soltanto dai punti iniziale e finale del cammino γ. Pertanto il lavoro è dato da $U(2,2) - U(1,3) = 2\sqrt{2} - \sqrt{10} - 11$.

2. Con il criterio della radice otteniamo

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{\sqrt{n}\log n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log n}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Quindi $R = 1/\ell = 1$.

3. La funzione è C^1. Inoltre, $f(0,0) = 0$, $\nabla f = (x + y + \frac{2x}{1+x^2}, x+1)$, e $\nabla f(0,0) = (0,1)$. $\partial_y f(0,0) \neq 0$, quindi valgono le ipotesi del Dini ed esplicito y in funzione di x, ovvero $y = y(x)$. Si ha che $y(0) = 0$, che $f(x,y(x)) = 0$ in un intorno di $x = 0$, e vale $y'(x) = -\frac{\partial_x f}{\partial_y f}$. Quindi $y'(0) = 0$. Derivando $f(x,y(x)) = 0$ due volte si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x^2 f(x,y(x)) + \partial_{x,y}^2 f(x,y(x))y'(x) \\ &\quad + \partial_{xy}^2 f(x,y(x))y'(x) + \partial_y^2 f(x,y(x))(y'(x))^2 + \partial_y f(x,y(x))y''(x) \end{aligned}$$

in un intorno di $x = 0$, e valutando in $x = 0$, con $\partial_x^2 f(0,0) = 3$, $\partial_{x,y}^2 f(0,0) = 1$, e $\partial_y^2 f(0,0) = 0$, otteniamo

$$y''(x) = -3$$

quindi $x = 0$ è un punto di massimo.

4a. Sia Σ superficie regolare orientabile con bordo $\partial^+\Sigma$ orientato positivamente, e quest'ultimo unione di curve regolari, con vettore tangente T. Allora, per un campo $C^1(\Sigma)$, si ha

$$\iint_\Sigma \nabla \times F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} F \cdot T \, ds$$

4b. Poiché $\nabla \times F = 0$, il flusso del rotore è nullo. Verifichiamo dunque che la circuitazione sul bordo di Σ sia nulla.Il bordo di Σ è costituito da due curve chiuse regolari, che sono nello specifico due ellissi. Vanno percorse in senso inverso, una volta scelta l'orientazione di Σ. La prima ellisse è parametrizzata da $\gamma_1(t) = (1, \frac{\cos t}{2}, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. La seconda da $\gamma_2(t) = (3, \frac{\sqrt{3}\cos t}{2}, \sqrt{3}\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. In entrambi i casi la circuitazione è nulla.